Ueber

den Einfluss der Abplattung des Erdsphäroids auf die Bewegung eines vom Pole aus mit gegebener Geschwindigkeit in Bewegung gesetzten schweren Körpers.

Inaugural-Dissertation

welche bei

Hochlöblicher Philosophischer Facultät zu Marburg

zur

Erlangung der Doctorwürde

einreicht

U. Wellmann

aus Wolgast.

Marburg, 1875.

Druck der Universitäts-Buchdruckerei von F. W. Kunike in Greifswald.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554412_0229

§ 1.

Wird die Erde als Umdrehungs-Ellipsoid betrachtet, dessen kleine Axe $2a$ Rotationsaxe ist, und dessen halbe grosse Axe b ist, so hat ihre Oberfläche die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

Wenn wir nun die Anziehung, welche die gesammte Masse des Erdballs auf einen an der Oberfläche in Bewegung zu setzenden materiellen Punkt ausübt, nach den Richtungen der Coordinatenaxen in die Componenten X, Y, Z zerlegen, und die Bedingung, dass der schwere Punkt sich auf der Oberfläche des Umdrehungs-Ellipsoides bewege, durch Einführung einer zur Fläche normal gerichteten Kraft N ersetzen, deren Richtung mit den drei Coordinatenaxen die Winkel ξ, η, ζ bilden möge, so erhalten wir als Gleichungen der Bewegung:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X+N\cos\xi \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y+N\cos\eta \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z+N\cos\zeta \end{aligned} \tag{2}$$

wobei m die Masse des beweglichen Körpers bedeutet, und von der Reibung des Körpers an der Erdoberfläche abstrahirt ist. Wenn ferner f die Grösse der Attraction, welche zwei materielle Punkte von der Masseneinheit in der Einheit der Entfernung auf einander ausüben, und ϱ die Dichtigkeit der als homogen betrachteten Erde bedeutet, so findet man die 3 Componenten der Attraction eines Rotations-Ellipsoides auf einen Punkt seiner Oberfläche nach Chasles:

$$X = -\frac{4\pi\varrho b^2 fmx}{a^2 l^3}(l - \operatorname{arc\,tang} l)$$

$$Y = -\frac{2\pi\varrho b^2 fmy}{a^2 l^3}\left(\operatorname{arc\,tang} l - \frac{l}{1+l^2}\right)$$

$$Z = -\frac{2\pi\varrho b^2 fmz}{a^2 l^3}\left(\operatorname{arc\,tang} l - \frac{l}{1+l^2}\right)$$

wo

$$l^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2} \quad \text{ist.}$$

Hiernach erhalten die Gleichungen (2), wenn wir zur Abkürzung:

(3) $$l - \operatorname{arc\,tang} l = \alpha$$

(4) $$\operatorname{arc\,tang} l - \frac{l}{1+l^2} = \beta$$

(5) $$\frac{2\pi\varrho f b^2}{a^2 l^3} = k$$

setzen, die Gestalt:

(6)
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2k\alpha x + \frac{N}{m}\cos\xi$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k\beta y + \frac{N}{m}\cos\eta$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -k\beta z + \frac{N}{m}\cos\zeta$$

Zur Bestimmung der Winkel ξ, η, ζ haben wir:

$$\cos\xi = \frac{\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}$$

$$\cos\eta = \frac{\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}$$

$$\cos\zeta = \frac{\frac{dF}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}$$

wobei

$$F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{ist.}$$

Die Gleichungen (2) resp. mit dx, dy und dz multiplicirt und dann addirt, ergeben:

$$\frac{d^2x}{dt^2}dx+\frac{d^2y}{dt^2}dy+\frac{d^2z}{dt^2}dz=Xdx+Ydy+Zdz$$

Die Summe der übrigen drei Glieder ist Null, da

$$\cos\xi\,dx+\cos\eta\,dy+\cos\zeta\,az=\frac{\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dz}\ddot{a}z}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}$$

ist, und hierin der Zähler das vollständige Differential von $F=0$, mithin selbst Null ist. Da ferner die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der zur Fläche normalen Kraft N mit der y und z Axe einschliesst, proportional den Coordinaten y und z des angezogenen Punktes sind, also $\cos\eta:\cos\zeta=y:z$, so kann man $N\cos\eta$ und $N\cos\zeta$ durch $N'y$ und $N'z$ ersetzen, dadurch werden Gleichung (2) mit y resp. z multiplicirt und sodann subtrahirt:

$$\frac{d^2y}{dt^2}z-\frac{d^2z}{dt^2}y=Yz-Zy=0$$

Integriren wir diese Gleichung theilweise, so ist:

$$\frac{dy}{dt}z-\int\frac{dy}{dt}dz-\frac{dz}{dt}y+\int\frac{dz}{dt}dy=\text{Const.}$$

(7)

$$\frac{dy}{dt}z-\frac{dz}{dt}y=\text{Const.}$$

Nun denken wir uns das jedesmalige x auf der Axe der x abgetragen, in diesem Punkte ein neues Coordinatensystem parallel dem ursprünglichen rechtwinkligen, und y sowie z durch Polarcoordinaten ausgedrückt, so ist:

$$x=x$$
$$y=r\cos\varphi$$
$$z=r\sin\varphi$$

wenn r den Radius des durch m laufenden Parallelkreises bezeichnet. Hierdurch wird:

$$\frac{dy}{dt}=-r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}+\cos\varphi\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt}=r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}+\sin\varphi\frac{dr}{dt}$$

Dadurch geht Gleichung (7) über in:

$$-r^2\sin^2\varphi\frac{d\varphi}{dt}+r\sin\varphi\cos\varphi\frac{dr}{dt}-r^2\cos^2\varphi\frac{d\varphi}{dt}=\text{Const.}$$

$$-r\sin\varphi\cos\varphi\frac{dr}{dt}$$

$$-r^2\frac{d\varphi}{dt}=\text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constanten betrachte man den schweren Punkt im Nordpol, dort ist $r=0$, mithin auch die Constante gleich Null, und

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=0$$

Integriren wir sodann die Gleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2}dx+\frac{d^2y}{dt^2}dy+\frac{d^2z}{dt^2}dz=-2k\alpha xdx-k\beta ydy-k\beta zdz,$$

so erhalten wir:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=-2k\alpha x^2-k\beta y^2-k\beta z^2+\text{Const.}$$

Die linke Seite der vorstehenden Gleichung ist gleich dem Quadrat der Geschwindigkeit v, so dass dieselbe auch die Form annehmen kann:

$$v^2=\text{Const}-2k\alpha x^2-k\beta y^2-k\beta z^2$$

Ferner drücken wir wieder y und z durch r und φ aus, so ergiebt sich mit Rücksicht darauf, dass $\frac{d\varphi}{dt}=0$, also

$$dy=\cos\varphi\,dr$$
$$dz=\sin\varphi\,dr \text{ ist,}$$
$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dr^2}{dt^2}=v^2=\text{Const}-2k\alpha x^2-k\beta r^2$$

Die tangentiale Anfangsgeschwindigkeit des schweren Punktes sei jetzt v_0, und zwar sei dieselbe parallel der Axe der y gerichtet. Dann findet keine Beschleunigung in Richtung der z Axe statt. Zur Bestimmung der Constanten betrachten wir den Zeitpunkt, in welchem der Punkt sich im Nordpol befindet, dort ist $x=a$, $r=0$, mithin ist: $\frac{dx^2}{dt^2}=v_0^2$, und dies eingeführt:

$$v_0^2=\text{Const}-2k\alpha a^2$$
$$\text{Const}=v_0^2+2k\alpha a^2$$

Diesen Werth führen wir für die Constante ein:

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dr^2}{dt^2}=v_0{}^2-2k\alpha x^2-k\beta r^2+2k\alpha a^2=v^2 \quad \text{oder}$$

$$v_0{}^2-v^2=2k\alpha x^2+k\beta r^2-2k\alpha a^2 \tag{8}$$

Nun ist aber $r^2=y^2+z^2$, mithin:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{r^2}{b^2}=1$$

$$r^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2; \quad rdr=-\frac{b^2}{a^2}xdx$$

$$\frac{dr}{dx}=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}; \quad \frac{dr}{dt}=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}\frac{dx}{dt}$$

Folglich:

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}\frac{dx^2}{dt^2}=v_0{}^2-2k\alpha x^2+2k\alpha a^2-k\beta\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$\frac{dx^2}{dt^2}\left(\frac{a^2(a^2-x^2)+b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}\right)=v_0{}^2+2k\alpha(a^2-x^2)-k\beta\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$\frac{dx^2}{dt^2}=\frac{a^2v_0{}^2(a^2-x^2)+2k\alpha(a^2-x^2)^2a^2-k\beta b^2(a^2-x^2)^2}{a^2(a^2-x^2)+b^2x^2}$$

$$dt=\frac{\sqrt{a^2(a^2-x^2)+b^2x^2}\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)\{a^2v_0{}^2-(a^2-x^2)(k\beta b^2-2k\alpha a^2)\}}}$$

$$dt=\frac{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}l^2\right)^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(v_0{}^2-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)h\right)a^2}}$$

Hierin ist $h=b^2k\beta-2k\alpha a^2$ eine positive Grösse, wie die numerische Rechnung ergiebt. Im Zähler kann die Klammer nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt werden, da der grösste Wert von $x=a$ und l^2 eine sehr kleine Zahl ist, mithin sich $\frac{x^2l^2}{a^2}$ stets zwischen den Grenzen -1 und $+1$ befindet. Sodann können alle höheren Potenzen von l^2 unterdrückt werden, da sie selbst für den grössten Werth von $x=a$ auf die siebente Dezimalstelle ohne Einfluss bleiben. Dadurch wird

$$dt = \frac{\left(1+\frac{x^2l^2}{2a^2}\right)dx}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(v_0{}^2-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)h\right)}}$$

$$= \frac{dx}{\sqrt{h}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(\frac{v_0{}^2-h}{h}+\frac{x^2}{a^2}\right)}} + \frac{x^2l^2dx}{2a^2\sqrt{h}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(\frac{v_0{}^2-h}{h}+\frac{x^2}{a^2}\right)}}$$

Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden, da $v_0{}^2 > = < h$ sein kann. Im ersten Falle erhalten wir die Normalform der elliptischen Integrale durch die Substitution:

(9) $$x = a\sqrt{1-w^2}$$

(10) $$p = \frac{\sqrt{h}}{v_0}$$

dann ist:

$$dx = -\frac{awdw}{\sqrt{1-w^2}}$$

und

$$dt = -\frac{awdw}{\sqrt{h}\sqrt{1-w^2}\sqrt{w^2\left(\frac{v_0{}^2-h}{h}+(1-w^2)\right)}} + \dots$$

$$= \frac{adw}{v_0\sqrt{(1-w^2)(1-p^2w^2)}} + \frac{l^2a(1-w^2)dw}{2v_0\sqrt{1-w^2)(1-p^2w^2)}}$$

Da t stets positiv, also auch dt, so musste von den beiden Vorzeichen der Wurzel das negative genommen werden. Setzen wir ferner:

(10) $$w = \sin\chi$$

also

$$dw = \cos\chi d\chi,$$

so wird

$$dt = \frac{ad\chi}{v_0\sqrt{1-p^2\sin^2\chi}} + \frac{l^2a\cos^2\chi d\chi}{2v_0\sqrt{1-p^2\sin^2\chi}}$$

$$t = \frac{a}{v_0}F(p,\chi) + \frac{l^2a}{2v_0}\int\frac{\cos^2\chi d\chi}{\sqrt{1-p^2\sin^2\chi}}$$

$$\frac{v_0t}{a} = F(p,\chi) + \frac{l^2}{2}\int\frac{\cos^2\chi d\chi}{\sqrt{1-p^2\sin^2\chi}}$$

Einen angenährten Werth von χ erhalten wir aus der Gleichung:

$$\frac{v_0t}{a} = F(p,\chi), \quad \text{nämlich:}$$

$$\chi = am\frac{v_0 t}{a},$$

und daraus auch für $w = \sin\chi$

$$w = sn\frac{v_0 t}{a}$$

Da aber aus der Entwickelung von dt nur das erste Glied berücksichtigt ist, so muss dem eben gefundenen Werthe von w noch eine Correction hinzugefügt werden, diese sei ε, so dass:

$$w = sn\frac{v_0 t}{a} + \varepsilon$$

wird. Nun ist:

$$\varepsilon = \frac{l^2}{2}\int\frac{\cos^2\chi\, d\chi}{\Delta(\chi)} = \frac{l^2}{2}\frac{E(p,\chi) - (1-p^2)F(p,\chi)}{p^2}$$

so dass:

$$w = sn\frac{v_0 t}{a} + \frac{l^2}{2}\frac{E(p,\chi) - (1-p^2)F(p,\chi)}{p^2}$$

und

$$x = a\sqrt{1 - \left(sn\frac{v_0 t}{a} + \frac{l^2}{2}\frac{E(p,\chi) - (1-p^2)F(p_1,\chi)}{p^2}\right)^2}$$

wird. Ist zweitens: $v_0{}^2 = h$, also

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{h}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}}} + \frac{x^2 l^2 dx}{2a^2\sqrt{h}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}}}$$

so setzen wir $\frac{x}{a} = \sin\psi$, dadurch entsteht:

$$dt = \frac{a\, d\psi}{\sqrt{h}\sin\psi} + \frac{al^2}{2}\frac{\sin^2\psi\, d\psi}{\cos\psi}$$

$$t = \frac{a}{\sqrt{h}}\, ln\,\mathrm{tang}\frac{\psi}{2} + \frac{al^2}{2\sqrt{h}}\int\left(\frac{1}{\cos\psi} - \cos\psi\right)d\psi$$

$$\frac{t\sqrt{h}}{a} = ln\,\mathrm{tang}\frac{\psi}{2} + \frac{l^2}{2}\int\left(\frac{1}{\cos\psi} - \cos\psi\right)d\psi$$

Berücksichtigen wir nur das erste Glied rechter Hand, so ist:

$$\psi = 2\,\mathrm{arc\,tang}\, Num\frac{t\sqrt{h}}{a} \quad \text{und}$$

$$x = a\sin 2\,\mathrm{arc\,tang}\, Num\frac{t\sqrt{h}}{a}$$

Hierzu die Correction $\varepsilon = \frac{l^2}{2}\left(\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right) - \sin\frac{\psi}{2}\right)$ hinzugefügt, ergiebt:

$$x = a\sin 2\,\text{arc tang}\,Num\,\frac{t\sqrt{h}}{a} + \frac{l}{2}\left(\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\text{arc tang}\,Num\,\frac{t\sqrt{h}}{a}\right)\right.$$
$$\left. - \sin\text{arct.}\,Num\,\frac{t\sqrt{h}}{a}\right)$$

Im dritten Falle, wo $v_0^2 < h$ ist, können wir

$$dt = \frac{\left(1+\frac{x^2}{a^2}\,l^2\right)dx}{\sqrt{h}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{h-v_0^2}{h}\right)}}$$

schreiben, dann bringt die Substitution:

$$\frac{h-v_0^2}{h} = s, \quad i = \sqrt{1-s}, \quad \frac{x}{a}\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{1-i^2w}}$$

den Ausdruck auf die Normalform, denn dadurch wird:

$$dx = \frac{a\sqrt{s}\,i^2 w dw}{(1-i^2w^2)^{\frac{1}{2}}}$$

und der erste Bruch:

$$dt = \frac{a\sqrt{s}\,i^2 w dw}{h(1-i^2w^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1-i^2w^2-s}{1-i^2w^2}\,\frac{s\,i^2w^2}{1-i^2w^2}}}$$
$$= \frac{a}{\sqrt{s}}\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-i^2w^2)}},$$

der zweite Bruch:

$$\frac{a\,l^2 s}{2\sqrt{h}}\frac{dw}{(1-i^2w^2)\sqrt{(1-w^2)(1-i^2w^2)}},$$

so dass

$$dt = \frac{a}{\sqrt{h}}\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-i^2w^2)}} + \frac{a\,l^2 s}{2\sqrt{h}}\frac{dw}{(1-i^2w^2)\sqrt{(1-w^2)(1-i^2w^2)}}$$

ist. Durch Einführung von $w = \sin u$ entsteht, unter einstweiliger Vernachlässigung des zweiten Gliedes:

$$t = \frac{a}{\sqrt{h}}\int\frac{du}{\Delta u} = \frac{a}{\sqrt{h}}F(i,u)$$

daraus:

$$\frac{t\sqrt{h}}{a} = F(i, u)$$

$$u = am\frac{t\sqrt{h}}{a}$$

$$w = sn\frac{t\sqrt{h}}{a}$$

Die hinzuzufügende Correction sei wiederum ε, so dass:

$$\varepsilon = \frac{l^2 s}{2}\int \frac{du}{(1-i^2\sin^2 u)^{\frac{1}{2}}} = \frac{l^2 s}{2}\int \frac{du}{\Delta^3 w}$$

ist, mithin, da

$$\int \frac{du}{\Delta^3 w} = \frac{1}{1-i^2}\left(E(i, u) - \frac{i^2 \sin w \cos u}{\Delta(i, u)}\right)$$

ist:

$$w = sn\frac{t\sqrt{h}}{a} + \frac{l^2 s}{2(1-i^2)}\left(E\left(i, am\frac{t\sqrt{h}}{a}\right) - \frac{i^2 sn\frac{t\sqrt{h}}{a}\, cn\frac{t\sqrt{h}}{a}}{\Delta\left(i, am\frac{t\sqrt{h}}{a}\right)}\right)$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{1-i^2\left\{sn\frac{t\sqrt{h}}{a} + \frac{l^2 s}{2(1-i^2)}\left(E\left(i, am\frac{t\sqrt{h}}{a}\right) - \frac{i^2 sn\frac{t\sqrt{h}}{a}\, cn\frac{t\sqrt{h}}{a}}{\Delta\left(i, am\frac{t\sqrt{h}}{a}\right)}\right)\right\}^2}}$$

Die constante Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich die Erde um die x Axe dreht, sei mit $\bar{\omega}$ bezeichnet. Auf die Werthe von x hat dieselbe keinen Einfluss, aber der Winkel φ, welchen der Radius des durch m laufenden Parallelkreises mit der Axe der y einschliesst, wird dadurch abhängig von der Zeit t, und deshalb ändern sich die Gleichungen:

$$y = r\cos\varphi \qquad \text{in} \qquad y = r\cos\bar{\omega}t$$
$$z = r\sin\varphi \qquad\qquad z = r\sin\bar{\omega}t$$

Ferner folgt aus:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1$$

$$r^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

Wird r durch y ausgedrückt, so ist:

$$r = \frac{y}{\cos\bar{\omega}t}$$

mithin

$$\frac{y^2}{\cos^2\bar{\omega}t} = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$y = b\cos\bar{\omega}t\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

Für die fernere Ausführung ist $v_0^2 > h$ angenommen also:

$$y = b\cos\bar{\omega}t\left(sn\frac{v_0 t}{a}+\frac{l^2}{2}\frac{E(p,\chi)-(1-p^2)F(p,\chi)}{p^2}\right)$$

Die Gleichung für z finden wir, indem wir

$$r = \frac{z}{\sin\bar{\omega}t}$$

setzen, also

$$z^2 = b^2\sin^2\bar{\omega}t\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$z = b\sin\bar{\omega}t\left(sn\frac{v_0 t}{a}+\frac{l^2}{2}\frac{E(p,\chi)-(1-p^2)F(p,\chi)}{p^2}\right)$$

Somit sind die Coordinaten der Curve, welche der schwere Punkt auf der Oberfläche der Erde beschreibt, als Functionen der Zeit t dargestellt, und man findet den Ort, an welchem sich der schwere Punkt zu einer bestimmten Zeit befindet, indem man dem t diesem Werth beilegt. Die Geschwindigkeit des schweren Punktes bestimmt sich dann aus der Gleichung:

$$v^2 = v_0^2 + 2k(a^2-x^2) - k\beta(y^2+z^2)$$

Hierin muss v mit dem Wachsen von t abnehmen, wie folgende Betrachtung zeigt. Die Formeln:

$$X = -\frac{3fMmx}{l^3a^3}(l-\operatorname{arc\,tang} l)$$

$$Y = -\frac{3fMmy}{2l^3a^3}\left(\operatorname{arc\,tang} l-\frac{l}{1+l^2}\right)$$

$$Z = -\frac{3fMmz}{2l^3a^3}\left(\operatorname{arc\,tang} l-\frac{l}{1+l^2}\right)$$

wobei m die Masse des auf der Oberfläche liegenden beweglichen Körpers, und $M = \frac{4}{3}\pi\varrho ab^2$ die Masse des Sphäroids bedeutet, und $l^2 = \frac{b^2-a^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1$, also $\frac{l}{1+l^2} = \frac{a^2}{b^2}$ ist, lassen sich, wenn wir

$$\frac{\operatorname{arc\,tang} l}{l} = \varepsilon$$

setzen, wobei ε eine positive Zahl etwas kleiner als die Einheit ist, aber $\frac{b}{a}\varepsilon > 1$ ausfällt, umgestalten in:

$$X = -\frac{3fMmx}{2l^2a^3}(2-2\varepsilon)$$

$$Y = -\frac{3fMmy}{2l^2ab^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\varepsilon - 1\right)$$

$$Z = -\frac{3fMmz}{2l^2ab^2}\left(\frac{l^2}{a^2}\varepsilon - 1\right)$$

Hieraus folgt zunächst $\frac{Y}{Z} = \frac{y}{z}$ d. h. die Richtung der Resultante $R = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ geht durch die Rotationsaxe, wie es auch die vorausgesetzte Homogenität des Sphäroids erfordert. Sodann wird:

$$\sqrt{Y^2+Z^2} = \frac{3fMm}{2l^2ab^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\varepsilon - 1\right)\sqrt{y^2+z^2}$$

also

I $$-\frac{X}{\sqrt{Y^2+Z^2}} = \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}\left(\frac{2-2\varepsilon}{\frac{b^2}{a^2}\varepsilon - 1}\right)$$

und durch diesen Ausdruck ist die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels von $R = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ gegen die Ebene des Aequators bestimmt.

Andererseits ist die Tangente des Neigungswinkels der Normale gegen die Ebene des Aequators:

II $$\frac{\frac{x}{a^2}}{\frac{b^2}{\sqrt{y^2+z^2}}} = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

Der in I vorkommende Quotient $\frac{2-2\varepsilon}{\frac{b^2}{a^2}\varepsilon - 1}$ lässt sich umgestalten in:

$$\frac{2 - \frac{\text{arc tang } l}{l}}{(1+l^2)\frac{\text{arc tang } l}{l} - 1} = \frac{2l - 2\,\text{arc tang } l}{(1+l^2)\,\text{arc tang } l - l}$$

und da $l = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1}$ für das Erdsphäroid ein sehr kleiner Bruch ist, so kann man setzen:

$$\text{arc tang } l = l - \tfrac{1}{3}l^3 + \tfrac{1}{5}l^5$$

wodurch

$$\frac{2-2\varepsilon}{\frac{b^2}{a^2}\varepsilon-1} = \frac{\frac{2}{3}l^3 - \frac{2}{5}l^5}{\frac{2}{3}l^3 - \frac{2}{15}l^5} = \frac{1-\frac{3}{5}l^2}{1-\frac{1}{5}l^2}$$

$$= 1 - \frac{2}{5}l^2$$

$$= 1 - \frac{2}{5}\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)$$

wird, also um die sehr kleine Grösse $\frac{2}{5}\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)$ weniger als die Einheit beträgt. Aus der Vergleichung von I und II ist daher zu schliessen, dass der Neigungswinkel von $R = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ gegen die Ebene des Aequators etwas kleiner als der Neigungswinkel der Normale ausfällt, dass also die Kraft R in der tangirenden Ebene bei einer vom Pole gegen den Aequator hin stattfindenden Bewegung eine rückwärts ziehende Componente liefern würde, d. h. eine freilich sehr geringe retardirende Wirkung ausübt. Als Resultat ist mithin gefunden:

$$(11) \qquad x = a\sqrt{1-\left(sn\frac{v_0 t}{a} + \frac{l^2}{2}\frac{E(p,\chi)-(1-p^2)F(p,\chi)}{p^2}\right)^2}$$

$$(12) \qquad y = b\cos\bar{\omega}t\left(sn\frac{v_0 t}{a} + \frac{l^2}{2}\frac{E(p,\chi)-(1-p^2)F(p,\chi)}{p^2}\right)$$

$$(13) \qquad z = b\sin\bar{\omega}t\left(sn\frac{v_0 t}{a} + \frac{l^2}{2}\frac{E(p,\chi)-(1-p^2)F(p,\chi)}{p^2}\right)$$

$$(14) \qquad v = \sqrt{v_0^2 + 2ak(a^2-x^2) - k\beta(y^2+z^2)}.$$

§ 2.

Wird dagegen die Erde als Kugel betrachtet, deren Radius die halbe grosse Axe b des Umdrehungs-Ellipsoides ist, so hat ihre Oberfläche die Gleichung:

$$x^2+y^2+z^2 = b^2$$

Nun ist die Attraction der Erde auf einen Punkt ihrer Oberfläche gleich mg, wobei m wiederum die Masse des Punktes bedeutet, und zwar geht die Richtung von g stets durch den Mittelpunkt der Erde, da eine Kugel einen äusseren Punkt so anzieht, als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkt vereinigt wäre. Die Normale einer Kugel geht

aber ebenfalls durch deren Mittelpunkt, woraus folgt, dass die Richtung von g mit der Richtung der Normale zusammenfällt. Ist also N eine zur Fläche normal gerichtete Kraft, durch deren Einführung die Bedingung ersetzt wird, dass der schwere Punkt sich auf der Oberfläche der Kugel bewege, so sind:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \pm\frac{N}{m}\frac{x}{b} + g\frac{x}{b}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \pm\frac{N}{m}\frac{y}{b} + g\frac{y}{b}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \pm\frac{N}{m}\frac{z}{b} + g\frac{z}{b}$$

die Gleichungen der Bewegung des schweren Punktes. Addiren wir vorstehende drei Gleichungen, nachdem sie vorher respective mit dx, dy und dz multiplicirt sind, so ergiebt sich:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\,dx + \frac{d^2y}{dt^2}\,dy + \frac{d^2z}{dt^2}\,dz = 0$$

denn:

$$\left(\frac{g}{b} \pm \frac{N}{mb}\right)(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = 0$$

da der zweite Factor als Differential von $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ gleich Null ist. Durch Integration wird dann:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \text{Const.}$$

Für die linke Seite der vorstehenden Gleichung können wir aber v^2 setzen, so dass:

$$v^2 = \text{Const.}$$

ist. Für den Nordpol ist aber die Geschwindigkeit v_0 bekannt, mithin:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = {v_0}^2$$

Die Bewegung des Punktes auf der Oberfläche der Erde ist also, wenn letztere als Kugel angenommen und von der Reibung abstrahirt wird, eine gleichmässige.

Bezeichnet dann r den Radius des durch m gehenden Parallelkreises, und φ den Winkel, welchen derselbe mit der Axe der y einschliesst, so ist:

$$x = x$$

$$y = r\cos\varphi$$

$$z = r\sin\varphi$$

und mit Rücksicht darauf, dass $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ ist:

$$\frac{dy}{dt} = \cos\varphi \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \sin\varphi \frac{dr}{dt}$$

also

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dr^2}{dt^2} = {v_0}^2$$

Aus $y^2 + z^2 = r^2$ folgt:

$$x^2 + r^2 = b^2; \quad r^2 = b^2 - x^2$$

$$r dr = -x dx$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}} \frac{dx}{dt}$$

also auch:

$$\frac{dx^2}{dt^2}\left(1 + \frac{x^2}{b^2 - x^2}\right) = {v_0}^2$$

$$dt = \frac{b dx}{v_0 \sqrt{b^2 - x^2}}$$

$$\frac{v_0 t}{b} = \arcsin\frac{x}{b}$$

$$\frac{x}{b} = \sin\frac{v_0 t}{b}$$

$$x = b \sin\frac{v_0 t}{b}$$

Auf die Werthe von x hat die constante Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$, mit welcher sich die Erde um ihre Axe dreht, keinen Einfluss, aber der Winkel φ des Radius mit der Axe der y verwandelt sich dadurch in $\bar{\omega}t$, so dass:

$$y = r\cos\bar{\omega}t$$

$$z = r\sin\bar{\omega}t$$

wird. Setzen wir nun in der Gleichung:

$$r^2 = b^2 - x^2$$

für r einmal den Werth $r = \frac{y}{\cos\bar{\omega}t}$ und dann

$$r = \frac{z}{\sin\bar{\omega}t}$$

so erhalten wir:

$$y = b \cos \bar{\omega} t \cos \frac{v_0 t}{b}$$

$$z = b \sin \bar{\omega} t \cos \frac{v_0 t}{b}$$

Somit sind die Gleichungen der Curve, welche durch die Bewegung eines schweren Punktes auf der Erde, diese als Kugel betrachtet, erzeugt wird:

$$x = b \sin \frac{v_0 t}{b}$$

$$y = b \cos \bar{\omega} t \cos \frac{v_0 t}{b}$$

$$z = b \sin \bar{\omega} t \cos \frac{v_0 t}{b}$$

Die Geschwindigkeit ist eine constante v_0.

§ 3.

Zur numerischen Berechnung der in § 1. vorkommenden elliptischen Functionen können mit Vortheil die Theta-Functionen benutzt werden. Denn bezeichnet:

$$\Theta(x, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-\tau n^2 + 2i(x - \frac{\pi}{2})n} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n e^{-\tau n^2} \cos 2nx$$

$$\Theta_1(x, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-\tau n^2 + 2nix} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-\tau n^2} \cos 2nx$$

$$H(x, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-\tau(n+\frac{1}{2})^2 + (2n+1)(x - \frac{\pi}{2})i} = 2 \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n e^{-\tau(n+\frac{1}{2})^2} \sin(2n+1)x$$

$$H_1(x, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-\tau(n+\frac{1}{2})^2 + (2n+1)ix} = 2 \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\tau(n+\frac{1}{2})^2} \cos(2n+1)x$$

so wird, wenn man $x = 0$ setzt:

$$\Theta(0, \tau) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n e^{-\tau n^2}$$

$$\Theta_1(0, \tau) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-\tau n^2}$$

$$H(0, \tau) = 0$$

$$H_1(0, \tau) = 2 \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\tau(n+\frac{1}{2})^2}$$

Aus diesen Reihen lassen sich folgende Relationen ableiten:

$$H_1(x,\tau)\,H_1(y,\tau) = H_1(x+y,2\tau)\,\Theta_1(x-y,2\tau)$$
$$\Theta_1^4(0,\tau) - \Theta^4(0,\tau) = H_1^4(0,\tau)$$
$$\Theta_1^2(0,\tau)\,\Theta_1^2(x,\tau) - H_1^2(x,\tau)\,H_1^2(0,\tau) = \Theta^2(0,\tau)\,\Theta^2(x,\tau)$$
$$\Theta_1^2(0,\tau)\,\Theta^2(x,\tau) - \Theta^2(0,\tau)\,\Theta_1^2(x,\tau) = H^2(x,\tau)\,H_1^2(0,\tau)$$

Setzen wir nun:

$$\frac{H(x,\tau)}{\Theta(x,\tau)} = f(x,\tau)$$
$$\frac{H_1(x,\tau)}{\Theta(x,\tau)} = g(x,\tau)$$
$$\frac{\Theta_1(x,\tau)}{\Theta(x,\tau)} = h(x,\tau)$$

so ergiebt sich unmittelbar:

$$h^2(0,\tau)\,h^2(x,\tau) - g^2(0,\tau)\,g^2(x,\tau) = 1$$
$$h^4(0,\tau) - g^4(0,\tau) = 1$$
$$h^2(0,\tau) - h^2(x,\tau) = g^2(0,\tau)\,f^2(x,\tau)$$
$$h^2(0,\tau)\,f^2(x,\tau) + g^2(x,\tau) = g^2(0,\tau)$$

Hiernach ist:

$$\frac{h^2(0,\tau)}{g^2(0,\tau)}f^2(x,\tau) + \frac{g^2(x,\tau)}{g^2(0,\tau)} = 1$$

Daher kann man:

$$\frac{h(0,\tau)}{g(0,\tau)}f(x,\tau) = \sin\chi$$
$$\frac{g(x,\tau)}{g(0,\tau)} = \cos\chi$$

setzen, und:

$$f^2(x,\tau) = \sin^2\chi\,\frac{g^2(0,\tau)}{h^2(0,\tau)}$$

also:

$$\frac{h^2(x,\tau)}{h^2(0,\tau)} = 1 - \left(\frac{g(0,\tau)}{h(0,\tau)}\right)^4 \sin^2\chi$$
$$\frac{h(x,\tau)}{h(0,\tau)} = \sqrt{1 - \left(\frac{g(0,\tau)}{h(0,\tau)}\right)^4 \sin^2\chi}$$

Ferner differentiiren wir:

$$\frac{h(0,\tau)}{g(0,\tau)}f(x,\tau) = \sin\chi = \frac{\Theta_1(0,\tau)}{H_1(0,\tau)}\,\frac{H(x,\tau)}{\Theta(x,\tau)}$$

logarithmisch, so ist:

$$\left(\frac{H'(x,\tau)}{H(x,\tau)} - \frac{\Theta'(x,\tau)}{\Theta(x,\tau)}\right) dx = \frac{\cos\chi\, d\chi}{\sin\chi}$$

Nun ist aber:

$$H'(x,\tau) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n (2n+1)\, e^{-\tau(n+\frac{1}{2})^2} \cos(2n+1)x$$

$$H'(0,\tau) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n (2n+1)\, e^{-\tau(n+\frac{1}{2})^2}$$

Dann setzen wir in der bekannten Formel:

$$\Theta_1(0,\tau)\, H_1(0,\tau)\, H(x+y,\tau)\, \Theta(x-y,\tau)$$
$$= \Theta(x,\tau)\, H(x,\tau)\, \Theta_1(y,\tau)\, H_1(y,\tau) - \Theta(y,\tau)\, H(y,\tau)\, \Theta_1(x,\tau)\, H_1(x,\tau)$$

y unendlich klein, und entwickeln nach dem Taylor'schen resp. Maclaurin'schen Lehrsatz, so wird:

$$\Theta_1(0,\tau)\, H_1(0,\tau)\, \{(H(x,\tau)+yH'(x,\tau))\,(\Theta(x,\tau)-y\Theta'(x,\tau))\}$$
$$= \Theta(x,\tau)\, H(x,\tau)\, \Theta_1(0,\tau)\, H_1(0,\tau) + yH'(0,\tau)\, \Theta(0,\tau)\, \Theta_1(x,\tau)\, H_1(x,\tau)$$

Auf der linken Seite lösen wir die Klammer auf, und unterdrücken die Glieder mit y^2 als unendlich klein II. Grösse, dann heben sich die ersten Glieder auf beiden Seiten und der Rest ist durch y theilbar, also:

$$\Theta_1(0,\tau)\, H_1(0,\tau)\, (H'(x,\tau)\, \Theta(x,\tau) - H(x,\tau)\, \Theta'(x,\tau))$$
$$= \Theta(0,\tau)\, H'(0,\tau)\, \Theta_1(x,\tau)\, H_1(x,\tau)$$

und für $H'(0,\tau)$ sein Werth eingeführt:

$$H'(x,\tau)\, \Theta(x,\tau) - H(x,\tau)\, \Theta'(x,\tau) = \Theta^2(0,\tau)\, \Theta_1(x,\tau)\, H_1(x,\tau)$$

schliesslich mit $\Theta(x,\tau)\, H(x,\tau)$ dividirt:

$$\frac{H'(x,\tau)}{H(x,\tau)} - \frac{\Theta'(x,\tau)}{\Theta(x,\tau)} = \frac{\Theta^2(0,\tau)\, \Theta_1(x,\tau)\, H_1(x,\tau)}{\Theta(x,\tau)\, H(x,\tau)}$$

Folglich ist:

$$\frac{\Theta^2(0,\tau)\, \Theta_1(x,\tau)\, H_1(x,\tau)}{\Theta(x,\tau)\, H(x,\tau)}\, dx = \frac{\cos\chi}{\sin\chi}\, d\chi$$

oder mit $\sin\chi = \dfrac{h(0,\tau)\; H(x,\tau)}{g(0,\tau)\; \Theta(x,\tau)}$ multiplicirt:

$$\Theta^2(0,\tau)\, \frac{h(0,\tau)}{g(0,\tau)}\, g(x,\tau)\, h(x,\tau)\, dx = \cos\chi\, d\chi$$

$$\Theta^2(0,\tau)\, h^2(0,\tau)\, \frac{h(x,\tau)}{h(0,\tau)}\, dx = d\chi$$

$$\Theta_1{}^2(0,\tau)\, dx = \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \dfrac{g^4(0,\tau)}{h^4(0,\tau)} \sin^2\chi}}$$

Integrirt man, so ist, wenn man $\frac{g^2(0,\tau)}{h^2(0,\tau)} = p$ setzt:

$$x\Theta_1{}^2(0,\tau) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-p^2\sin^2\chi}}$$

Ist nun, wie vorliegend der Werth des Integrals gegeben, so lässt sich das x der Theta Functionen berechnen. Denn den Modul τ finden wir, indem wir die folgenden Gleichungen addiren und subtrahiren:

$$\Theta_1(0,\tau) = 1+2e^{-\tau}+2e^{-4\tau}+2e^{-9\tau}+\ldots$$
$$\Theta(0,\tau) = 1-2e^{-\tau}+2e^{-4\tau}-2e^{-9\tau}+\ldots$$

$$\Theta_1(0,\tau)+\Theta(0,\tau) = 2+4e^{-4\tau}+4e^{-16\tau}+\ldots$$
$$\Theta_1(0,\tau)-\Theta(0,\tau) = 4e^{-\tau}+e^{-9\tau}$$

$$\frac{\Theta_1(0,\tau)-\Theta(0,\tau)}{\Theta_1(0,\tau)+\Theta(0,\tau)} = \frac{e^{-\tau}+e^{-9\tau}}{\frac{1}{2}+e^{-4\tau}+e^{-16\tau}}$$

Aus $p^2 = \frac{g^4(0,\tau)}{h^4(0,\tau)}$ folgt, wenn $p^2+p'^2 = 1$ ist:

$$p'^2 = \frac{h^4(0,\tau)-g^4(0,\tau)}{h^4(0,\tau)} = \frac{\Theta^4(0,\tau)}{\Theta_1{}^4(0,\tau)}$$

mithin ist

$$\frac{\Theta_1(0,\tau)-\Theta(0,\tau)}{\Theta_1(0,\tau)+\Theta(0,\tau)} = \frac{1-\frac{\Theta(0,\tau)}{\Theta_1(0,\tau)}}{1+\frac{\Theta(0,\tau)}{\Theta_1(0,\tau)}} = \frac{1-\sqrt{p'}}{1+\sqrt{p'}} = \frac{e^{-\tau}+e^{-9\tau}}{\frac{1}{2}+e^{-4\tau}+e^{-16\tau}}$$

Da die Reihen sowohl im Zähler wie im Nenner sehr rasch convergiren, so können alle höheren Potenzen als $e^{-12\tau}$ unterdrückt werden. Setzt man demnach:

$$\tfrac{1}{2}\frac{1-\sqrt{p'}}{1+\sqrt{p'}} = l = \frac{e^{-\tau}(1+e^{-8\tau})}{1+2e^{-4\tau}}$$

und $l^4 = a$, so ist:

$$l = \frac{lz(1+e^{-8\tau})}{1+2e^{-4\tau}},$$

wo $lz = e^{-\tau}$ ist. Nach z entwickelt:

$$z = \frac{1+2e^{-4\tau}}{1+e^{-8\tau}} = 1+2e^{-4\tau}-e^{-8\tau}-e^{-12\tau}$$

$$z = 1+2az^4-a^2z^8-2a^3z^{12}$$

In dieser Gleichung setzen wir auf der rechten Seite für z seinen Werth aus derselben Gleichung ein, dann wird, wenn wir nur bis a^3 gehn, nach einander:

$$z = 1+2a(1+2az^4-a^2z^8)^4-a^2(1+2az^4)^8-2a^3$$
$$z = 1+2a(1+8az^4+20a^2z^8)-a^2-18a^3$$
$$z = 1+2a+16a^2z^4-a^2+22a^3$$
$$z = 1+2a+15a^2+150a^3$$

dann für a sein Werth l^4 eingesetzt:

$$z = 1+2l^4+15l^8+150l^{12}$$

$$e^{-\tau} = \frac{l(1+2e^{-4\tau})}{1+e^{-8\tau}} = lz = l+2l^5+15l^9+150l^{13}$$

$$e^{-\tau} = \tfrac{1}{2}\frac{1-\sqrt{p'}}{1+\sqrt{p'}}+\left(\frac{1-\sqrt{p'}}{1+\sqrt{p'}}\right)^5+\cdots$$

Nun folgt aus:

$$\frac{v_0 t}{a} = \int \frac{d\chi}{\sqrt{1-p^2\sin^2\chi}} = F(p,\chi)$$

durch Umkehrung:

$$\chi = am\frac{v_0 t}{a}$$

oder

$$w = \sin\chi = sn\frac{v_0 t}{a},$$

und da

$$\sin\chi = \frac{\Theta_1(0,\tau)\,H(x,\tau)}{H_1(0,\tau)\,\Theta(x,\tau)}$$

gefunden war,

$$w = sn\frac{v_0 t}{a} = \frac{\Theta_1(0,\tau)\,H(x,\tau)}{H_1(0,\tau)\,\Theta(x,\tau)}$$

Um $E(p,\chi)$ durch Theta-Functionen auszudrücken, setzen wir in der Additionsformel:

$$\Theta^2(0,\tau)\,\Theta(x+y,\tau)\,(\Theta(x-y,\tau) = \Theta^2(x,\tau)\,\Theta^2(y,\tau)-H^2(x,\tau)\,H^2(y,\tau)$$

y unendlich klein, und entwickeln nach dem Taylor'schen Lehrsatz, so erhalten wir:

$$\Theta^2(0,\tau)\,(\Theta(x,\tau)\,y\Theta'(x,\tau)+\frac{y^2}{1.2}\Theta''(x,\tau))\,(\Theta(x,\tau)-y\Theta'(x,\tau)+\frac{y^2}{1.2}\Theta''(x,\tau))$$
$$= \Theta^2(x,\tau)\,(\Theta(0,\tau)+\frac{y^2}{1.2}\Theta''(0,\tau)^2)-H^2(x,\tau)\,y^2H^2(0,\tau)$$

Lassen wir die unendlich kleinen Grössen II. Ordnung fort, so hebt sich $\Theta^2(0,\tau)\,\Theta^2(x,\tau)$ und wir können mit y^2 dividiren, dadurch wird, wenn wir für $H^1(0,\tau)$ seinen Werth einführen, und mit $\Theta^2(0,\tau)$ $\Theta(x,\tau)$ dividiren:

$$\frac{\Theta''(x,\tau)}{\Theta(x,\tau)} - \frac{\Theta'^2(x,\tau)}{\Theta^2(x,\tau)} = \frac{\Theta''(0,\tau)}{\Theta(0,\tau)} - \frac{\Theta_1{}^2(0,\tau)\,H_1{}^2(0,\tau)\,H^2(x,\tau)}{\Theta^2(x,\tau)}$$
$$= \frac{\Theta''(0,\tau)}{\Theta(0,\tau)} - sn^2\frac{v_0 t}{a}\,H_1{}^4(0,\tau)$$

Nun ist $sn^2\frac{v_0 t}{a} = 1 - dn^2\frac{v_0 t}{a}$, also wenn wir mit

$$dx = \frac{\frac{v_0 t}{a}\,dt}{\Theta_1{}^2(0,\tau)}$$

multipliciren:

$$\left(\frac{\Theta''(x,\tau)}{\Theta(x,\tau)} - \frac{\Theta'^2(x,\tau)}{\Theta^2(x,\tau)}\right)dx$$
$$= \frac{\Theta''(0,\tau)}{\Theta(0,\tau)\,\Theta_1{}^2(0,\tau)}\,\frac{v_0}{a}\,dt - \Theta_1{}^2(0,\tau)\left(1 - dn^2\frac{v_0 t}{a}\right)\frac{v_0}{a}\,dt$$

Integrirt, wenn wir zugleich den aus der Gleichung

$$\chi = am\,\frac{v_0 t}{a}$$

bekannten Werth als Variabeln einführen:

$$\frac{\Theta'(x,\tau)}{\Theta(x,\tau)} = \frac{\Theta''(0,\tau)}{\Theta(0,\tau)\,\Theta_1{}^2(0,\tau)}\,\chi - \Theta_1{}^2(0,\tau)\,\chi + \Theta_1{}^2(0,\tau)\,E(p,\chi)$$

Hier drücken wir χ durch x aus, so ist:

$$E(p,\chi) = \frac{\Theta'(x,\tau)}{\Theta_1{}^2(0,\tau)\,\Theta(x,\tau)} - x\left(\frac{\Theta''(0,\tau)}{\Theta_1{}^2(0,\tau)\,\Theta(0,\tau)} - \Theta_1{}^2(0,\tau)\right)$$

Da aber:

$$\frac{\Theta''(0,\tau)}{\Theta(0,\tau)} - \Theta_1{}^4(0,\tau) = \frac{H_1''(0,\tau)}{H_1(0,\tau)}$$

ist, so erhalten wir:

$$E(p,\chi) = \frac{\Theta'(x,\tau)}{\Theta_1{}^2(0,\tau)\,\Theta(x,\tau)} - \frac{x}{\Theta_1{}^2(0,\tau)}\,\frac{H_1''(0,\tau)}{H_1(0,\tau)}$$

§ 4.

Die tangentiale Anfangsgeschwindigkeit des schweren Punktes am Nordpol sei nun $v_0 = 150$ Meter in der Secunde. Die constante

Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die Erde sich um ihre Axe dreht, finden wir aus der Betrachtung, dass die Dauer eines ganzen Umlaufes 86164,1 Sekunden beträgt, mithin:

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{86164{,}1} = 0{,}00007292$$

Ferner ist der Logarithmus der halben kleinen Axe a in Metern ausgedrückt:

$$\log a = 6{,}8031894, \quad \text{ebenso } b, \text{ die halbe}$$
$$\log b = 6{,}8046435 \quad \text{grosse Axe.}$$

Sodann ist:

$$l = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}$$

$$\log b^2 = 13{,}6092870$$
$$\log a^2 = 13{,}6063788$$

$$\log \frac{b^2}{a^2} = 0{,}0029082 \qquad \frac{b^2}{a^2} - 1 = l^2 = 0{,}0067188$$

$$\log l^2 = 7{,}8272917 - \qquad \log l = 8{,}9136458 -$$

mithin

$$l = 0{,}0819683$$

Um arctang l zu berechnen, bilden wir die Reihe:

$$\text{arctang}\, l = l - \frac{l^3}{3} + \frac{l^5}{5} \ldots$$

$$\log \frac{l^3}{3} = 6{,}2638161 \qquad \frac{l^3}{3} = 0{,}00018357$$

$$\log \frac{l^5}{5} = 3{,}8692590 \qquad \frac{l^5}{5} = 0{,}0000007405$$

$$\text{arctang}\, l = 0{,}08178547$$

Ferner war

$$\alpha = l - \text{arctang}\, l = 0{,}0001828$$

$$\beta = \text{arctang}\, l - \frac{l}{1 + l^2} = 0{,}00036425$$

$$k = \frac{2\pi\varrho f b^2}{a^2 l^3}$$

Nun ist die Dichtigkeit der als homogen angesehenen Erde $\varrho = 5{,}6$. Dann lässt sich der Factor f, welcher die Anziehung zweier Masseneinheiten in der Entfernungseinheit bedeutet, aus der Beziehung bestimmen, dass:

$$\frac{fM}{b^2} = g$$

ist, aber $f = \frac{g b^2}{M}$. wo M die Masse der Erde und b, die halbe grosse Axe, den Durchmesser der als Kugel betrachteten Erde bezeichnet. Daraus findet sich:

$$\log f = 1{,}5274407 —$$

Dann ist:

$$\log k = 6{,}3357794 —$$

$$h = b^2 k\beta - 2k\alpha a^2 = ka^2\left(\frac{b^2}{a^2}\beta - 2\alpha\right)$$

$$\log h = 3{,}9421582$$

Der Modul p kann also berechnet werden

$$p^2 = \frac{h}{{v_0}^2} = 0{,}3890233$$

sodann

$$p'^2 = 1 - p^2 = 0{,}6109767 \qquad \sqrt{p'} = 0{,}8841096$$

also:

$$e^{-\tau} = \tfrac{1}{2}\frac{1-\sqrt{p'}}{1+\sqrt{p'}} + \left(\frac{1-\sqrt{p'}}{1+\sqrt{p'}}\right)^5$$

$$e^{-\tau} = 0{,}0308265$$

$$\Theta_1(0,\tau) = 1 + 2e^{-\tau} + 2e^{-4\tau}$$

$$\log e^{-\tau} = 8{,}4889243$$

$$\Theta_1(0,\tau) = 1{,}0617548 \qquad \log\Theta_1(0,\tau) = 0{,}0260242$$

Nun soll der Ort berechnet werden, an welchem sich der schwere Punkt nach Verlauf von 10 Stunden befindet, wo also $t = 36000$ ist. Das x der Theta-Functionen ist mithin:

$$x = \frac{t v_0}{a\Theta_1^2(0)}$$

$$x = 0{,}7536262$$

$$w = sn\frac{v_0 t}{a} = \frac{\Theta_1(0,\tau)\, H(x,\tau)}{H_1(0,\tau)\,\Theta(x,\tau)}$$

Um x in Graden auszudrücken, gilt die Formel:

$$\frac{\pi}{2} : 90^0 = 0{,}7536262 : x^0$$

$$x^0 = 43^0\ 10'\ 41''$$

$$H(x,\tau) = 2e^{-\frac{\tau}{4}}\sin x - 2e^{-\frac{9}{4}\tau}\sin 3x \ldots$$
$$= 0{,}5721200$$
$$0{,}0006052$$
$$H(x,\tau) = 0{,}5715148$$

$$H_1(0,\tau) = 2e^{-\frac{\tau}{4}} + 2e^{-\frac{9}{4}\tau}$$
$$= 0{,}8380329$$
$$= 0{,}0007964$$
$$H_1(0,\tau) = 0{,}8388293$$

$$\Theta(x,\tau) = 1 - 2e^{-\tau}\cos 2x + 2e^{-4\tau}\cos 4x$$
$$\Theta(x,\tau) = 0{,}9960817$$

$$\log\Theta_1(0,\tau) + \log H(x,\tau) = 9{,}8830517 -$$
$$\log H_1(0,\tau) + \log\Theta(x,\tau) = 9{,}9219686 -$$
$$\log w = 9{,}9610831$$
$$w = 0{,}9142881 + \varepsilon$$

Aus $w = \sin\chi$ folgt:

$$\chi = \arcsin w = w + \frac{1}{6}w^3 + \frac{3}{40}w^5 + \ldots$$

woraus sich für χ der Werth:

$$\chi = 1{,}1482806 \quad \text{ergiebt.}$$

$$E(p,\chi) = \frac{\Theta'(x,\tau)}{\Theta_1^2(0,\tau)\,\Theta(x,\tau)} - \frac{x}{\Theta_1^2(0,\tau)}\,\frac{H_1''(0,\tau)}{H_1(0,\tau)}$$

$$\Theta'(x,\tau) = 4e^{-\tau}\sin 2x - 8e^{-4\tau}\sin 4x$$

$$\log\Theta(x,\tau) = 9{,}0905216$$
$$\log\Theta_1^2(0,\tau) + \log\Theta(x,\tau) = 0{,}0503434$$
$$\log\frac{\Theta'(x,\tau)}{\Theta_1^2(0,\tau)\,\Theta(x,\tau)} = 9{,}0401782$$
$$\frac{\Theta'(x,\tau)}{\Theta_1^2(0,\tau)\,\Theta(x,\tau)} = 0{,}1096928$$
$$\frac{x}{\Theta_1^2(0,\tau)} = 0{,}6685095$$
$$E(p,\chi) = 0{,}7781033$$

$$F(p,\chi) = x\Theta_1^2(0,\tau); \quad \log(1-p^2) + \log F(p,\chi) = \log 0{,}2590294$$
$$\varepsilon = -0{,}0022358$$
$$w = 0{,}9120523$$

$$x = a\sqrt{1-w^2} \qquad \log w = 9{,}9600197$$
$$\log w^2 = 9{,}9200394$$

$w^2 = 0{,}8318392$ $\qquad$ $1 - w^2 = 0{,}1681608$

$\log 1 - w^2 = 9{,}2257248-$ $\qquad$ $\log \sqrt{1-w^2} = 9{,}6128624$

$\log a \quad = 6{,}8031894$

$\log x = 6{,}4160518$ $\qquad$ $x = 2606465$

Nun ist $\bar{\omega} = 0{,}00007292$, also $\bar{\omega}t = 2{,}6244000$

$\bar{\omega}t = 150^0\ 22'\ 1''$

Dadurch wird $\cos \bar{\omega}t = -\sin 60^0\ 22'\ 1''$, folglich wird y negativ.

$\log \cos \bar{\omega}t \quad = 9{,}9391246-$ $\qquad$ $\log \sin \bar{\omega}t \quad = 9{,}6941166-$

$\log b \quad = 6{,}8046435$ $\qquad$ $\log b \quad = 6{,}8046435$

$\log \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = 9{,}9600196-$ $\qquad$ $\log \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = 9{,}9600196$

$\log y = 6{,}7037877$ $\qquad$ $\log z = 6{,}4587797$

$y = -5055774$ $\qquad$ $z = 2875939$

Um noch den geographischen Ort zu bestimmen, an welchem sich der schwere Punkt nach Verlauf von zehn Stunden befindet, muss der Meridian gegeben sein, zu welchem tangential er seine Bahn beginnt. Sei dies derjenige, welcher durch die Insel Ferro geht. Legen wir dann parallel zur Aequatorialebene in der Entfernung x vom Anfangspunkt der Coordinaten eine Ebene, so schneidet diese aus der Erde einen Kreis aus, auf welchem sich der Punkt befindet. Setzen wir deshalb in der Gleichung eines Meridians:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

x als Funktion von y, so ist:

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}\frac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}}$$

$$ds = \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}\, dy$$

$$s = \int_0^y dy \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}\frac{y^2}{b^2 - y^2}}$$

Hieraus wird durch Einführung der Excentricität

$$e^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2}$$

$$s = \int dy \sqrt{\frac{1 - e^2 \frac{y^2}{b^2}}{1 - \frac{y^2}{b^2}}}$$

Es ist aber $\frac{y}{b} =$ oder < 1, mithin kann man es gleich $\sin\varphi$ setzen, und daraus $y = b \sin\varphi$, folglich

$$dy = b \cos\varphi \, d\varphi$$

und

$$s = b \int d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}$$

oder durch Integration:

$$s = b E(e, \varphi)$$

Da hierin $e = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}}$ bekannt ist, so lässt sich der Medul der Theta-Functionen berechnen, daher auch

$$e^{-\tau} = \tfrac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{\varepsilon'}}{1 + \sqrt{\varepsilon'}} + \left(\frac{1 - \sqrt{\varepsilon'}}{1 + \sqrt{\varepsilon'}}\right)^5 + \cdots$$

wo: $\varepsilon'^2 = 1 - \varepsilon^2$ ist.

Nun ist:

$$\log \varepsilon = 9{,}2020252 \qquad \log \varepsilon'^2 = 8{,}4040504$$
$$\varepsilon^2 = 0{,}0253541 \qquad \varepsilon'^2 = 0{,}9746458$$
$$\log \varepsilon'^2 = 9{,}9888468 \qquad \log \sqrt{\varepsilon'} = 9{,}9972117$$
$$1 - \sqrt{\varepsilon'} = 0{,}0064001 \qquad 1 + \sqrt{\varepsilon'} = 1{,}0064001$$
$$\log e^{-\tau} = 7{,}5023857$$

Aus $\frac{y}{b} = \sin\varphi$ folgt:

$$\varphi = \arcsin \frac{y}{b} = \frac{y}{b} + \frac{1}{6} \frac{y^3}{b^3} + \frac{15}{48} \frac{y^6}{b^6} + \cdots$$

$$\varphi = 0{,}8145718$$

Jetzt können wir auch das x der Theta-Functionen berechnen aus:

$$x = \frac{\varphi}{\Theta_1^2(0, \tau)},$$

woraus sich ergiebt:

$$\log x = 9{,}9054231$$

da

$$\Theta_1(0, \tau) = 1{,}0063594$$

ist, oder x in Graden

$$x^0 = 46^0\ 5'\ 2{,}4''.$$

Dann wird

$$E(\varepsilon, \varphi) = 0{,}8271213$$

und

$$s = 5274882$$

Ferner beträgt ein Erdquadrant 10,000,000 Meter, folglich findet die Proportion statt:

$$90^0 : 10{,}000{,}000 = s^0 : 5274882$$

oder:

$$s = 47^0\ 28'\ 12''$$

Da jedoch die Breitengrade vom Aequator ab gezählt werden, so liegt der Punkt:

$42^0\ 31'\ 48''$ nördlicher Breite.

Ferner muss noch die Lage gegeben sein, in welcher die Erde sich bei Beginn der Bewegung des schweren Punktes befindet. Nun dreht sich dieselbe von Westen nach Osten, und es soll der Punkt seine Bahn in dem Augenblick beginnen, in welchem der durch die Insel Ferro gehende Meridian seine östlichste Stellung erreicht hat, wo also für seinen Durchschnittspunkt mit der Aequatorialebene $x = 0$, $z = 0$, $y = b$ ist. Dann befindet sich der schwere Punkt nach Verlauf von zehn Stunden:

$42^0\ 31'\ 48$ nördlicher Breite, und

150^0 westlicher Länge

Seine Geschwindigkeit ist dann in diesem Augenblicke

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2k\alpha a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - k\beta(y^2 + z^2}$$

woraus sich nach Einsetzung der entsprechenden Werthe:

$v = 121{,}5$ Meter ergiebt

Wird dagegen von der Abplattung der Erde abstrahirt, diese also als Kugel betrachtet, so erhalten wir:

$$150^m \times 36000 : 7420{,}4 \times 15$$

oder

$48^0\ 30'\ 54''$

also befindet sich der Punkt nach Verlauf von zehn Stunden im Parallelkreise von nördlicher Breite

$41^0\ 29'\ 6''$

Durch die Abplattung der Erde erleidet mithin der Punkt eine Verzögerung von

$1^0\ 2'\ 42''$

und seine Geschwindigkeit hat abgenommen um

28,5 Meter.